ISSN: 2957 - 8108

# مجلة بحوث

# جامعة حلب في المناطق المحررة

المجلد الثاني – العدد الثالث

3 / 3 / 1445 هـ - 18 / 9 / 2023 م

علميّة - ربعيّة - محكّمة

تصدر عن

جامعة حلب في المناطق المحرّرة

بسم الله الرحمن الرحيم

# مجلة جامعة حلب في المناطق المحررة

مجلّة علميّة محكّمة فصليّة، تصدر باللغة العربية، تختص بنشر البحوث العلمية والدراسات الأكاديمية في مختلف التخصصات، تتوفر فيها شروط البحث العلمي في الإحاطة والاستقصاء ومنهج البحث العلمي وخطواته، وذلك على صعيدي العلوم الإنسانية والاجتماعية والعلوم الأساسية والتطبيقية.

## رؤية المجلة:

تتطلع المجلة إلى الريادة والتميز في نشر الأبحاث العلميّة.

## رسالة المجلة:

الإسهام الفعّال في خدمة المجتمع من خلال نشر البحوث العلميّة المحكّمة وفق المعايير العلمية العالمية.

## أهداف المجلة:

- نشر العلم والمعرفة في مختلف التخصصات العلميّة.
- توطيد الشراكات العلمية والفكرية بين جامعة حلب في المناطق المحررة ومؤسسات المجتمع المحلي والدولي.
- أن تكون المجلة مرجعاً علمياً للباحثين في مختلف العلوم.

**الرقم المعياري الدولي للمجلة ISSN: 2957-8108**

**الموقع الإلكتروني للمجلة:** https://journal-fau.com **البريد الإلكتروني:** info@journal-fau.com

## معايير النشر في المجلة:

1- تنشر المجلة الأبحاث والدراسات الأكاديمية في مختلف التخصصات العلميّة باللغة العربية.

2- تنشر المجلة البحوث التي تتوفر فيها الأصالة والابتكار، واتباع المنهجية السليمة، والتوثيق العلمي مع سلامة الفكر واللغة والأسلوب.

3- تشترط المجلة أن يكون البحث أصيلاً وغير منشور أو مقدم لأي مجلة أخرى أو موقع آخر.

4- يترجم عنوان البحث واسم الباحث والمشاركين أو المشرفين إن وجدوا إلى اللغتين التركية والإنكليزية.

5- يرفق بالبحث ملخص عنه باللغات الثلاث العربية والإنكليزية والتركية على ألا يتجاوز 200-250 كلمة، وبخمس كلمات مفتاحية مترجمة.

6- يلتزم الباحث بتوثيق المراجع والمصادر وفقاً لنظام جمعية علم النفس الأمريكية (**APA7**).

7- يلتزم الباحث ألا يزيد البحث على 20 صفحة.

8-ترسل البحوث المقدمة لمحكمين متخصصين، ممن يشهد لهم بالنزاهة والكفاءة العلمية في تقييم الأبحاث، ويتم هذا بطريقة سرية، ويعرض البحث على محكّم ثالث في حال رفضه أحد المحكّمين.

9- يلتزم الباحث بإجراء التعديلات المطلوبة خلال 15 يوماً.

10- يبلغ الباحث بقبول النشر أو الاعتذار عنه، ولا يعاد البحث إلى صاحبه إذا لم يقبل، ولا تقدم أسباب رفضه إلى الباحث.

11- يحصل الباحث على وثيقة نشر تؤكد قبول بحثه للنشر بعد موافقة المحكمين عليه.

12- تعبّر الأبحاث المنشورة في المجلة عن آراء أصحابها، لا عن رأي المجلة، ولا تكون هيئة تحرير المجلة مسؤولة عنها.

## جدول المحتوى:

# حل معادلة ريكاتي التفاضلية الكسرية باستخدام مويجات ليجندر

إعداد:

آ. ديمه بولاد    د. محمد نضال الخطيب    د. كمال بكور

**ملخص البحث:**

تم في هذا البحث تطبيق مصفوفة مويجات ليجندر $(LWM)$ لحل معادلة ريكاتي غير الخطية الكسرية، لهذه المعادلة أهمية واسعة ومفتوحة في معظم العلوم وخاصة الهندسية والتطبيقية. لحل هذه المعادلة تم تحويلها إلى نظام المعادلات الجبرية باستخدام مصفوفة مويجات ليجندر حيث أعطت نتائج أكثر دقة وأداء أفضل وجهداً حسابياً أقل.

كما تم دراسة الوجود والوحدانية لحل المعادلة المقترحة ودراسة شرط التقارب والتحقق منه.

**كلمات مفتاحية:** الحساب التفاضلي الكسري، معادلة ريكاتي التفاضلية ذات الرتب الكسرية، حل المعادلات التفاضلية الكسرية، مويجات ليجاندر، الاشتقاق الكسري بمفهوم ريمان–ليوفل، الاشتقاق الكسري بمفهوم كابوتو.

# Solving a Riccati Fractional Differential Equation by Using Legendre Wavelet

Prepared by:

Mr. Dima Boulad Dr. Mohamed Nidal Al-Khatib Dr. Kamal Bakour

**Abstract:**

A Legendre wavelet operational matrix method (LWM) presented for the solution of nonlinear fractional order Riccati differential equations, having variety of applications in engineering and applied science. The fractional order Riccati differential equations converted into a system of algebraic equations using Legendre wavelet operational matrix. Solutions given by the proposed scheme are more accurate and reliable and they are compared with recently developed numerical, analytical and stochastic approaches. Comparison shows that the proposed LWM approach has a greater performance and less computational effort for getting accurate solutions. Further existence and uniqueness of the proposed problem are given and moreover the condition of convergence is verified.

**Keywords:** Fractional Calculus, Fractional order Riccati differential equation, Solution, Solving fractional differential equations, Legendre wavelet, Riemann - Liouville fractional derivative, Caputo fractional derivative.

# Legendre Dalgacık Matrisi Kullanarak Ricati Kesirli Diferansiyel Denklemini Çözme

Hazırlayanlar:

Öğr. Gör. Dima Bolad Dr. Mohammed Nidal Al-Hatib Dr. Kemal Bakkur

**Özet**:

Bu yazıda, kesirli lineer olmayan Ricati denklemini çözmek için Legendre Dalgacık Matrisi (LWM) uygulanmıştır. Bu denklem çoğu bilimde, özellikle mühendislik ve uygulamalı bilimlerde geniş ve açık bir öneme sahiptir. Araştırmanın amacı, bu denklemi çözmek ve daha sonra Legender'ın dalgacık matrisini kullanarak daha doğru sonuçlar, daha iyi performans ve daha az hesaplama gücü veren bir cebirsel denklemler sistemine dönüştürmektir.

Önerilen denklemi çözmek için varlık ve birlik de çalışılmış ve yakınsama koşulu incelenmiş ve doğrulanmıştır.

**Anahtar kelimeler:** Kesirli diferansiyel hesap, kesirli mertebelerden Ricati diferansiyel denklemi, kesirli diferansiyel denklemlerin çözümü, Wavelet of Legendre, Riemann-Leuvel konseptine göre kesirli türev, Caputo kavramıyla kesirli türev.

**مقدمة:**

أصبح حساب التفاضل والتكامل الكسريين $(FC)$ محط اهتمام العديد من الباحثين في مختلف تخصصات العلوم والتكنولوجيا، حيث أظهر قدراً كبيراً من الفائدة في استخدام حساب التفاضل–التكامل الكسري في النمذجة والتحكم في العديد من الأنظمة الديناميكية [1] وتمثيل هذا النمط في مجال التردد من خلال وظائف التحويل غير المنطقية.

تتمثل إحدى الصعوبات الرئيسية في كيفية حل المعادلات التفاضلية ذات الرتب الكسرية، لذلك تم اقتراح بعض التقنيات لحلها مثل طريقة التحلل وهي الطريقة الأكثر شيوعا $(ADM)$ [2]، طريقة التكرار المتغير $(VIM)$ [3]، طريقة التحويل التفاضلي الجزئي $(FDTM)$ [4]، طريقة سلسلة الطاقة [5]، طريقة المصفوفة التشغيلية [6]، طريقة $Homotopy$ [7]، طريقة الفروق الجزئية $(FDM)$ [8]، وهناك أيضاً بعض الحلول التقليدية مثل طريقة لابلاس [9]، بالرغم من وجود كل هذه الطرق المختلفة للحل إلا أن تطبيق طريقة مويجات ليجندر $(LWM)$ يبقى الأسهل ولم يسلط عليه الضوء.

في هذا البحث غايتنا توسيع تطبيق طريقة مويجات ليجندر $(LWM)$، سواءً على معادلات تفاضلية أو تكاملية كسرية خطية وغير خطية، وعلى معادلة ريكاتي التفاضلية ذات الرتب الكسرية.

حيث تعمل طريقة مويجات ليجندر $(LWM)$ على تحويل معادلة ريكاتي التفاضلية الكسرية إلى جملة معادلات جبرية غير خطية يمكن حلها بسهولة وتعطي أجوبة دقيقة.

سنبدأ بالتذكير بكثيرات حدود ليجندر، ثم سنعرف طريقة تمديد تابع باستخدام مويجات ليجندر في حل معادلات تفاضلية تكاملية ذات رتب كسرية خطية وغير خطية، وسنعرف مصفوفة العمليات للتكامل لمويجات ليجندر لنتوصل أخيرا لحل معادلة ريكاتي التفاضلية الكسرية غير الخطية.

وسنعرف التكامل والتفاضل الكسريين بالاعتماد على مفهوم $Riemann-Liouville$ ريمان – ليوفل وبالاعتماد على مفهوم كابوتو $Caputo$.

**أهمية البحث وأهدافه:**

يهدف هذا البحث إلى دراسة معادلة ريكاتي التفاضلية ذات الرتب الكسرية مع شروط ابتدائية معطاة معنا من خلال تقديم طريقة لتحويل المعادلة السابق ذكرها إلى جملة معادلات جبرية غير خطية باستخدام طريقة مويجات ليجندر. إن الحلول العددية التقريبية التي ستنتج عن حل جملة المعادلات الجبرية تعد في غاية الأهمية، لأنها تمكن الباحثين من فهم سلوك الظواهر الفيزيائية أو الكيميائية والتنبؤ بالنتائج المستقبلية لها.

**طرائق البحث ومواده:**

يندرج هذا البحث تحت اختصاص التحليل التابعي والمعادلات التفاضلية والجبر الخطي ويوظفها لمعالجة المعادلات التفاضلية ذات الرتب الكسرية لتطوير آليات الحل الدقيق للمعادلة المدروسة.

**$i$) التكامل والتفاضل الكسريان**

**1- مفاهيم أساسية في الحساب التفاضلي الكسري *Fractional Differential Calculus*:**

سنتعرف على تعاريف أساسية بمفهوم التفاضل الكسري

**2- تعريف:[11]**

يقال عن تابع حقيقي $f(t)$ معرف على المجال $(0,T]$ أنه ينتمي إلى الفضاء $C_\gamma[0,T]$ حيث $\gamma \in R$، إذا وجد عدد حقيقي $p > \gamma$ يحقق أن

$$f(t) = t^p f_1(t) \quad ; \quad f_1(t) \in C[0,T] \qquad (1)$$

وعندئذ نجد أن

$$f \in C_\gamma^n[0,T] \iff f_1(t) \in C[0,T] \qquad (2)$$

**3- تعريف :**

يعرف اشتقاق كابوتو الكسري $Caputo\ \ Fractional\ \ Derivative$ من المرتبة $\alpha > 0$ لدالة $u \in C_\gamma^n[0,T]$ حيث $\gamma \geq -1$ وكذلك $n = [\alpha] + 1$ ، مع العلم أن الرمز

$[\alpha]$ يعني القسم الصحيح للعدد $\alpha$، بالعلاقة الآتية:

$$\frac{d^{\alpha}u(t)}{dt^{\alpha}} = J_{0+}^{n-\alpha}\left(u^{(n)}(t)\right)$$
$$= \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\displaystyle\int_0^t \frac{u^{(n)}(s)}{(t-s)^{\alpha+1-n}}ds\,; & 0 < t \le T\,, \alpha \notin \mathbb{N} \\ \dfrac{d^{\alpha}u(t)}{dt^{\alpha}} & ;\quad \alpha = n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \end{cases} \tag{3}$$

يمكن ملاحظة أنه لحساب قيمة المشتق الكسري في نقطة ما، فإنه يتوجب أخذ قيم الدالة المعنية منذ اللحظة الابتدائية، ويبدو ذلك في التعريف من خلال التكامل على المجال $[0,t]$، وهذا مايدعى بالخاصة اللامحلية للمؤثر الكسري أو تأثير الذاكرة.**[11]**

**4- تعريف: [12]**

يعرف التفاضل الكسري بمفهوم ريمان- ليوفيل

$Riemann - Liouville$ بحيث $\alpha, a, t \in \mathbb{R}\,, \alpha > 0, t > a\,, n \in \mathbb{N}$

$$D_*^{\alpha}f(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\dfrac{d^n}{dt^n}\displaystyle\int_a^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha+1-n}}d\tau & ; n-1 < \alpha < n \\ \dfrac{d^n}{dt^n}f(t) & \alpha = n \in \mathbb{N} \end{cases} \tag{4}$$

**5- تعريف: [12]**

يعرف تكامل ريمان-ليوفيل الكسري $Riemann - Liouville\ Fractional\ Integral$

من المرتبة $\alpha \ge 0$ بحيث $a \ge 0$ بالعلاقة:

$$\mathrm{J}_a^{\alpha}f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-t)^{\alpha-1}f(t)dt \quad ; x > 0 \tag{5}$$

$$\mathrm{J}_a^{0}f(x) = f(x) \tag{6}$$

بسهولة نجد أن

$$J^0 f(x) = f(x) \tag{7}$$

وكذلك في حالة $\alpha > 0$ و $\beta > -1$ نجد

$$J^\alpha (t-\alpha)^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} (t-\alpha)^{\alpha+\beta} \tag{8}$$

**6- نتيجة:[13]**

في حالة $\beta, \alpha > 0$

$$J^\alpha \left(J^\beta f(t)\right) = J^\beta \left(J^\alpha f(t)\right) = J^{\alpha+\beta} f(t) \tag{9}$$

**7- نتيجة:[13]**

$$D^n \left(D^\alpha f(t)\right) = D^\alpha \left(D^n f(t)\right) = D^{n+\alpha} f(t) \tag{10}$$

**8- نتيجة:[13]**

$$J^\alpha \left(D^\alpha f(t)\right) = f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} f^{(k)}(0) \frac{t^k}{k!} \tag{11}$$

ولدينا:

$$D^\alpha \left(J^\beta f(t)\right) = D^{\alpha-\beta} f(t) \tag{12}$$

**9- نتيجة: [13]**

حسب تعريف التفاضل الكسري بمفهوم كابوتو برتبة $\alpha > 0$

حيث $\alpha \in \mathbb{R}$ ; $n-1 < \alpha < n$ ; $n \in \mathbb{N}$ و $f: (0, \infty) \to \mathbb{R}$ تابع مستمر، بالعلاقة

$$D^\alpha f(t) = J^{n-\alpha} \left(\frac{d^n}{dt^n} f(t)\right) \tag{13}$$

**10– تعريف: [13]**

إن تعريف التفاضل الكسري بمفهوم كابوتو برتبة $\alpha > 0$

حيـــث $\alpha \in \mathbb{R}$ ; $n-1 < \alpha < n$ ; $n \in \mathbb{N}$ و $f:(0,\infty) \to \mathbb{R}$ تـــابع مســـتمر، بالعلاقة

$$D^{\alpha} f(t) = J^{n-\alpha}\left(\frac{d^n}{dt^n} f(t)\right) \qquad (14)$$

**$ii$) كثيرات حدود ليجندر:[27]**

وهي كثيرات الحدود المعرفة على الفترة $[-1,1]$ يرمز لها $P_n(x)$ تعطى بالعلاقة:

$$P_0(x) = 1, P_n(x) = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} (-1)^k \frac{(2n-2k)!}{2^n k!\,(n-k)!\,(n-2k)!} (2x)^{n-2k} \quad ; n \geq 1 \quad (15)$$

حيث الرمز [ ] يعني الجزء الصحيح لما داخله.

لدينا

$$P_0(x) = 1$$

$$P_1(x) = x$$

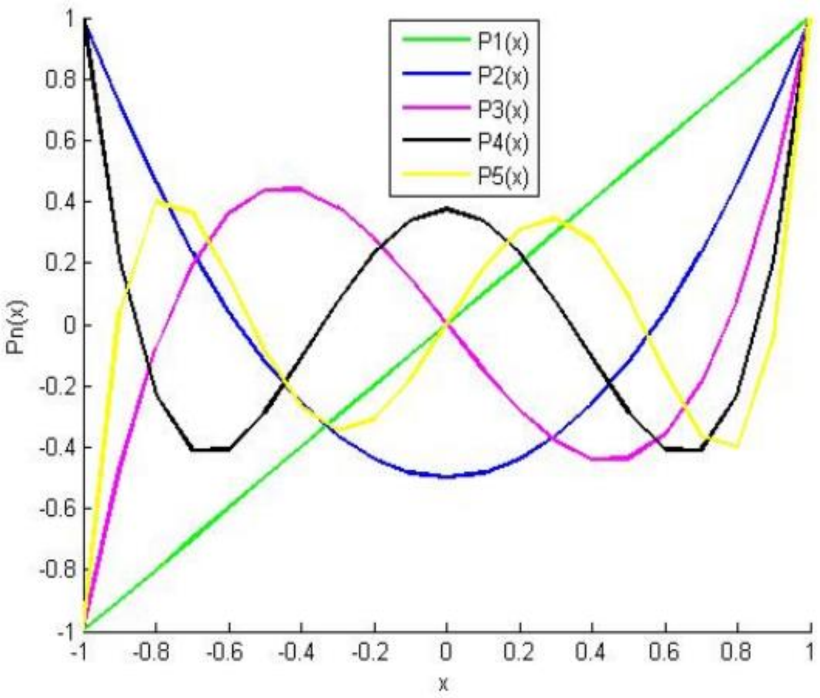
$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$$

$$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$$

$$P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)$$

$$P_5(x) = \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x)$$

وهي ممثلة في الشكل التالي:




**تمثيل لبعض كثيرات حدود ليجاندر**

**11– ملاحظة:**

يمكن التعبير عن كثيرات حدود ليجندر بالعلاقة:(16)

$$P_0(x) = 1, \qquad P_n(x) = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} (-1)^k \frac{(2n-2k)!}{2^{2k} k!\,(n-k)!\,(n-2k)!} (x)^{n-2k} \quad ; n \geq 1$$

**12– تعريف كثيرات حدود ليجندر بالاشتقاق:**

تعطى كثيرات حدود ليجندر من أجل $x \in [-1,1]$ بعلاقة رودريدج

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2-1)^n \quad ; n \geq 0 \qquad (17)$$

**13- ملاحظة:**

يمكن تعريف كثيرات حدود ليجندر على المجال $[a, b]$بالعلاقة:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n}[(x-a)^n (x-b)^n] \quad ; n \geq 0 \qquad (18)$$

**14- مويجات ليجندر:[14], [15], [16], [17]**

سنرمز لها بالرمز $\psi_{nm}(x)$ وتعطى بالمساواة الآتية:

$$\psi_{nm}(x) = \begin{cases} \left(\frac{2m+1}{2}\right)^{1/2} 2^{k/2} P_m(2^k x - \hat{n}) & ; \frac{\hat{n}-1}{2^k} \leq x \leq \frac{\hat{n}+1}{2^k} \\ 0 & ; \ otherwise \end{cases} \qquad (19)$$

حـيـث $m = 0,1,2, \dots, M-1$ و $n = 1,2, \dots, 2^{k-1}$ و $\hat{n} = 2n - 1$ و $k = 1,2, \dots, \hat{n}$

حيث $k$ هو رتبة كثير حدود ليجندر و $M$ عدد موجب ثابت، $P_m(x)$ كثير حدود ليجندر ذات الرتبة $m$

**15- مثال عددي تطبيقي:**

بوضع $k = 2$ و $M = 3$

$$0 \leq t < \frac{1}{2} ; \begin{cases} \psi_{10} = 2^{1/2} \\ \psi_{11} = 6^{1/2}(4t-1) \\ \psi_{12} = (10)^{1/2}\left[\frac{3}{2}(4t-1)^2 - \frac{1}{2}\right] \end{cases}$$

إن التابع $f(x)\in L^2[0,1)$ ممكن أن يتمدد بمويجات ليجندر كما هو موضح:

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}c_{nm}\psi_{nm}(x) \tag{20}$$

حيث $c_{nm}=<f(x),\psi_{nm}(x)>$

وإذا كانت السلاسل في العلاقة السابقة محدودة عندها تكتب العلاقة السابقة بالشكل:

$$f(x)=\sum_{n=1}^{2^{k-1}}\sum_{m=0}^{M-1}c_{nm}\psi_{nm}(x)=c^T\psi(x) \tag{21}$$

حيث $\psi(x),C$ هما $\hat{m}=2^{k-1}$ شعاع عمودي يعطى بالشكل:(22)

$$C=\left[c_{10},c_{11},\dots,c_{1M-1},c_{20},c_{21},\dots,c_{2M-1},\dots,c_{2^{k-1}0},c_{2^{k-1}1},\dots,c_{2^{k-1}M-1}\right]^T$$

$$\psi(x)=\left[\psi_{10},\psi_{11},\dots,\psi_{1M-1},\psi_{20},\psi_{21},\dots,\psi_{2M-1},\dots,\psi_{2^{k-1}0},\psi_{2^{k-1}1},\dots,\psi_{2^{k-1}M-1}\right]^T$$

للتبسيط نكتب العلاقة (20) بالشكل:

$$f(x)\approx\sum_{i=1}^{\hat{m}}c_i\psi_i(x)=C^T\psi(x) \tag{23}$$

حيث $\psi_i=\psi_{nm}$ و $c_i=c_{nm}$ يتم تحديد المؤشر $i$ بالعلاقة

$i=M(n-1)+m+1$ وبالتالي نكتب:

$$C=\left[c_1,c_2,\dots,c_M,c_{M+1},\dots,c_{2M},\dots,c_{M(2^{k-1}-1)+1},\dots,c_{\hat{m}}\right]^T \tag{24}$$

$$\psi(x)=\left[\psi_1,\psi_2,\dots,\psi_M,\psi_{M+1},\dots,\psi_{2M},\dots,\psi_{M(2^{k-1}-1)+1},\dots,\psi_{\hat{m}}\right]^T \tag{25}$$

ويتم تمديد التوابع الكيفية التابعة لمتغيرين $u(x,y)$ معرفة على طول المجال $[0,1) \times [0,1)$ باستخدام مويجات ليجندر بالعلاقة:

$$u(x,y) \approx \sum_{i=1}^{\hat{m}} \sum_{j=1}^{\hat{m}} u_{ij} \psi_i(x) \psi_j(y) = \psi^T(x) U \psi(y) \tag{26}$$

حيث $U = [u_{ij}]$ و $u_{ij} =< \psi_i(x), < u(x,y), \psi_j(y) >>$ .

**16- مبرهنة:**

التابع $f(x)$ المعرف على $[0,1]$ محدود وكذلك مشتقه الثاني أي أن:

$$|f''(x)| \leq \hat{M} \tag{27}$$

عندئذٍ يمكن تمديده كمجموع لمويجات ليجندر، والسلسلة تتقارب بشكل موحد للتابع $f(x)$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} c_{nm} \psi_{nm}(x) \tag{28}$$

حيث $c_{nm} =< f(x), \psi_{nm}(x) >$

**17- مبرهنة:**

إذا كانت التوابع المستمرة $u(x,y)$ المعرفة على المجال $[0,1) \times [0,1)$ وتحقق عليه مايلي:

$$\left| \frac{d^4 u(x,y)}{dx^2 dy^2} \right| \leq \hat{M} \tag{29}$$

عندئذٍ يمكن تمديد $u(x,y)$ كمجموع لمويجات ليجندر، والسلسلة تتقارب بشكل وحيد له.

**18- مصفوفة العمليات للتكامل لمويجات ليجندر:[19] ,[18]**

بأخذ مجموعة توابع معرفة على المجال $[0,1]$ نجد توابع القطع النبضية المعرفة بالعلاقة:

$$b_i(x) = \begin{cases} 1 & ; ih \le x < (i+1)h \quad ; i = 0,1,2,\dots,\widehat{m}-1 \\ 0 & ; otherwise \end{cases} \tag{30}$$

حيث $\widehat{m} = 0,1,2,\dots$ و $h = 1/\widehat{m}$ ،

((في بعض المراجع يرمز لها بـ $\varphi_i(x)$ بدلاً من $b_i(x)$.))

لنوضح خواص توابع القطع النبضية:

$$b_i(x)b_j(x) = \begin{cases} 0 & ; i \ne j \\ b_i(x) & ; i = j \end{cases} \tag{31}$$

وكذلك

$$\int_0^1 b_i(x)b_j(x)dx = \begin{cases} 0 & ; i \ne j \\ \dfrac{1}{\widehat{m}} & ; i = j \end{cases} \tag{32}$$

لتكن $B(x) = [b_0(x), b_1(x), \dots, b_{\widehat{m}-1}(x)]^T$

وكذلك

$$B_m(x).[B_m(x)]^T = \begin{bmatrix} b_1(x) & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & b_m(x) \end{bmatrix} \tag{33}$$

فيكون

$$J^\alpha\big(B(x)\big) \approx F^\alpha B(x) \tag{34}$$

حيث $F^{\alpha}$ تسمى مصفوفة العمليات للتكامل الكسري لتوابع القطع النبضية، وتكتب بالشكل:

$$F_{\alpha} = h^{\alpha}\frac{1}{\Gamma(\alpha+2)}\begin{bmatrix} 1 & \xi_1 & \xi_2 & \cdots & \xi_{m-1} \\ 0 & 1 & \xi_1 & \cdots & \xi_{m-2} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & \xi_{m-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \tag{35}$$

حيث:

$$\xi_k = (k+1)^{\alpha+1} - 2k^{\alpha+1} + (k-1)^{\alpha+1}\,; k = 1,2,\dots,\widehat{m}-1$$

وبالتالي فإن العلاقة بين توابع القطع النبضية ومويجات ليجندر هي:

$$\psi(x) = \Phi B(x) \tag{36}$$

حيث

$$\Phi = [\psi(x_0),\psi(x_1),\dots,\psi(x_{\widehat{m}-1})]\ \ ; x_i = i/\widehat{m}\ \ ; i = 0,1,\dots,\widehat{m}-1$$

إذا $J^{\alpha}$ عبارة عن عمليات تكاملية كسرية لمويجات ليجندر، أي:

$$J^{\alpha}\psi(x) \approx P^{\alpha}\psi(x) \tag{37}$$

حيث $P^{\alpha}$ تسمى مصفوفة العمليات التكاملية الكسرية لمويجات ليجندر

بالاستفادة من العلاقتين (34)(36) نجد:

$$J^{\alpha}\psi(x) \approx J^{\alpha}\Phi B(x) = \Phi J^{\alpha}B(x) \approx \Phi F^{\alpha}B(x) \tag{38}$$

من العلاقات (38)(37) يمكننا استنتاج أن:

$$P^{\alpha}\psi(x) = P^{\alpha}\Phi B(x) = \Phi F^{\alpha}B(x) \tag{39}$$

وبالتالي نستنتج أن قيمة $P^{\alpha}$ هي

$$P^{\alpha} = \Phi F^{\alpha} \Phi^{-1} \tag{40}$$

### $iii$) حل المعادلة التفاضلية الكسرية غير الخطية من نوع ريكاتي:[20], [21]

في هذا القسم سوف نستخدم مويجة ليجندر المعممة ذات المصفوفة لحل معادلة ريكاتي $Riccati$ التفاضلية الكسرية غير الخطية، وسنناقش وجود الحلول وتفردها مع الشروط الأولية ومعايير التقارب لنهج مويجات ليجندر المدروسة.

### 19- تعريف المعادلة التفاضلية الكسرية غير الخطية من نوع ريكاتي:

إن معادلة ريكاتي التفاضلية من نظام غير صحيح (كسورية) تعطى بالعلاقة:

$$D^{\alpha}y(t) = P(t)y^2 + Q(t)y + R(t) \ ; t > 0, 0 < \alpha \leq 1 \tag{41}$$

والتي تخضع للشرط الأولي

$$y(0) = k. \tag{42}$$

من الواضح أنه في حالة $\alpha = 1$ تتحول المعادلة (41) إلى معادلة ريكاتي التفاضلية الكلاسيكية.

### 20- حل معادلة ريكاتي التفاضلية الكسرية:

لنفرض أن التوابع $D^{\alpha}y(t)$ ، $P(t)$ ، $Q(t)$ و $R(t)$ يتم تقريبها (تمديدها) باستخدام مويجات ليجندر كالتالي:

$$D^{\alpha}y(t) = U^T\Psi(t)\, , P(t) = V^T\Psi(t)\, , Q(t) = W^T\Psi(t)\, , R(t) = X^T\Psi(t) \tag{43}$$

حيث $U, V, W, X, \Psi(t)$ معطاة بالعلاقة (4.4) وبالاعتماد (2.11) نجد:

$$y(t) = J^{\alpha}\big(D^{\alpha}y(t)\big) - y(0) \tag{44}$$

من العلاقات (37) و (28) و (44) نجد

$$y(t) \approx U^T P^{\alpha}\Psi(t) + Y_0^T\Psi(t) = C^T\Psi(t) \tag{45}$$

حيث :

$$y(0) = k \approx Y_0^T \Psi(t) , \qquad C = (U^T P^{\alpha} + Y_0^T)^T \tag{46}$$

نبدل العلاقات (45) و (43) في العلاقة (41) فنجد

$$U^T \Psi(t) = V^T \Psi(t)[C^T \Psi(t)]^2 + W^T \Psi(t) C^T \Psi(t) + X^T \Psi(t) \tag{47}$$

بتعويض العلاقة (36) في العلاقة (47) نجد

$$U^T \Phi = V^T [C^T \Phi]^2 + W^T C^T \, \Phi + X^T \tag{48}$$

حيث $C, V, W, \Phi$ معروفة.

إن المعادلة (48) تمثل نظام المعادلات غير الخطية مع متجه غير معروف $U$ .

ويمكن حل هذا النظام من المعادلات غير الخطية بسهولة باستخدام أي طريقة نراها مناسبة.

**21- وجود ووحدانية الحلول لمعادلة ريكاتي التفاضلية الكسرية:**

تعريف:

ليكن $I = [0, l] \, ; l < \infty$ وليكن $C(I)$ صف جميع التوابع المستمرة المعرفة على المجال $I$ وفق المعيار:

$$||y|| = \sup_{t \in I} \left| e^{-ht} y(t) \right| \; ; h > 0 \tag{49}$$

لنفترض أن $y(t)$ هو الحل لمعادلة ريكاتي التفاضلية من نظام غير صحيح (كسورية) والمحقق للمعادلتين $(41), (42)$ ينتمي إلى الفضاء $S = \{y \in \mathbb{R} \, ; |y| \le c \, ; c = const\}$ وذلك من أجل ضمان وجود حل وتفرده للمعادلة (41).

**22- تعريف:**

يعرف الفضاء التوابع القابلة للمكاملة $L_1[0,1]$ والمعرفة على المجال $I = [0, l]$ بالشكل:

$$L_1[0,1] = \left\{ \mathrm{u(t)}; \int_0^l |u(t)| dt < \infty \right\} \tag{50}$$

**23- مبرهنة:[13]**

الحل الوحيد الذي يحقق كلا المعادلتين (3.3.1) , (3.3.2) هو $y(t)$ الذي يحقق:

$$y \in C(I)\,, y' \in X = \left\{ y \in L_1[0,1], ||y|| = \left||e^{-ht} y(t)|\right|_{L_1} \right\} \tag{51}$$

**24- ملاحظة:[13]**

بالاعتماد على العلاقة (13) يمكن أن تكتب المعادلة التفاضلية (41) بالشكل:

$$J^{1-\alpha} \frac{dy(t)}{dt} = P(t)y^2 + Q(t)y + R(t) \;; t > 0, 0 < \alpha \leq 1 \qquad (52)$$

فتصبح

$$y(t) = J^{\alpha}(P(t)y^2 + Q(t)y + R(t)\,) \tag{53}$$

إن هذا الحل هو حل وحيد بحيث $y(t) \in C(I)$ وذلك بالاعتماد على المبرهنة السابقة.

**25- تطبيقات عددية:**

من أجل إظهار فعالية تطبيق مويجات ليجندر سـنقوم بتطبيقها على معادلة ريكاتي التفاضـلية الكسـرية وغير الخطية، وكذلك الحال من أجل المعادلات التفاضـلية – التكاملية الكسـرية سـواء كانت خطية أو غير خطية.[13], [20], [14], [22], [23] , [24], [21], [25], [26]

**مثال (1):**

$$D^{\alpha} y(t) = 1 + 2y(t) - y^2(t) \;;\;\; 0 < \alpha \leq 1$$

ضمن الشرط $y(0) = 0$

إن الحل الدقيق يعطى في حالة $\alpha = 1$ بالعلاقة:

$$y(t) = 1 + \sqrt{2}\, tanh\left(\sqrt{2}t + \frac{1}{2} log\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right)\right)$$

إن هذه المعادلة هي معادلة ريكاتي التفاضلية ذات رتبة كسرية وحلها هو:

$$J^{\alpha}\left(D^{\alpha}y(t)\right) = J^{\alpha}(1 + 2y(t) - [y(t)]^2)$$

$$y(t) = y(0) + \frac{t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} + 2J^{\alpha}y(t) - J^{\alpha}y^2(t)$$

لدينا $y(t) = C^T\Psi(t)$ فيكون:

$$J^{\alpha}y(t) = C^T J^{\alpha}\Psi(t) = C^T P^{\alpha}_{2^{k-1}M\times 2^{k-1}M}\Psi(t)$$

عندئذ نجد:

$$C^T\Psi(t) = \frac{t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} + 2C^T P^{\alpha}_{2^{k-1}M\times 2^{k-1}M}\Psi(t) - C^T P^{2\alpha}_{2^{k-1}M\times 2^{k-1}M}\Psi(t)$$

من خلال حل نظام المعادلات الخطية أعلاه، يمكننا إيجاد المتجه $C$. حيث يتم الحصـــول على نتائج عددية لمختلف قيم $k, M, \alpha$ .

إن الحلول العددية التي حصـــلنا عليها باســـتخدام طريقة مويجات ليجندر كانت من أجل القيم الآتية:

$k = 2,\ \alpha = 0.9,0.8,0.7,0.6\ , M = 5$ موضحه بالشكل $(1)$

وكذلك من أجل القيم

$k = 2, \alpha = 1, M = 2$ و $k = 2, \alpha = 1, M = 3$ و $k = 2, \alpha = 1, M = 5$

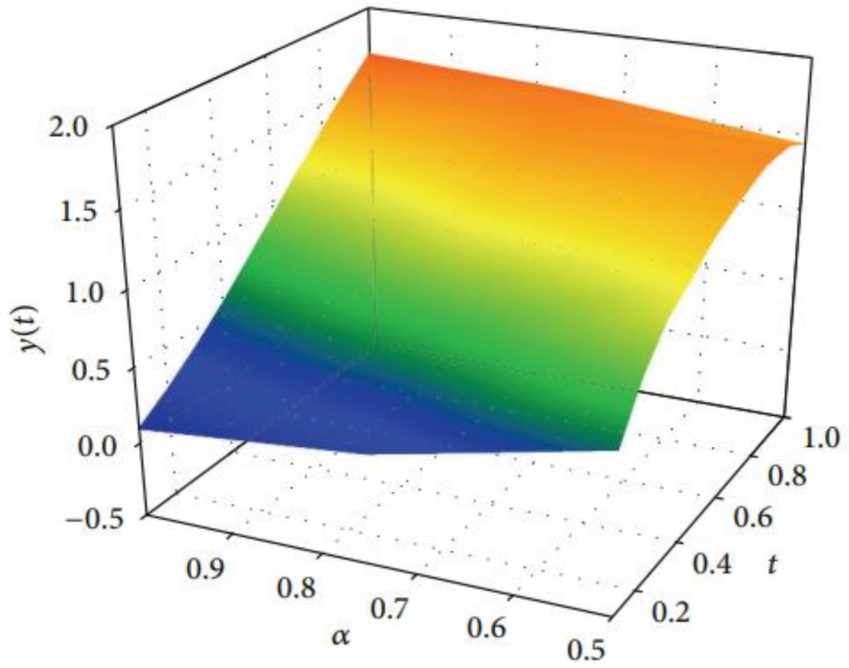
موضحة بالجدول $(1)$.

يصـــف الجدول $(1)$ كفاءة طريقتنا المدروســـة في حل التمرين وذلك من خلال مقارنتها مع الطرق الواردة في [25], [21] من خلال خطئهم المطلق.

حيث يتم حساب أخطاء التقريب من خلال العلاقة

$$||y - \hat{y}|| = max|y(t) - \hat{y}(t)|$$

يوضح الجدول (1) أنه تم الحصول على دقة عالية بالحلول العددية عندما $M = 5$ , $k = 3$.




**الشكل (1) النتائج العددية باستخدام $(LWM)$ من أجل مختلف قيم $\alpha$ المدروسة**

| $t$ | Exact solution | Absolute error in [22] | Absolute error in [20] | LWM $M = 2, k = 2$ | LWM $M = 3, k = 2$ | LWM $M = 5, k = 3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.1 | 0.099667 | $7.51E-09$ | $9.30E-05$ | 0 | 0 | 0 |
| 0.2 | 0.197375 | $1.52E-06$ | $2.93E-02$ | $1.91E-08$ | 0 | 0 |
| 0.3 | 0.291312 | $3.93E-05$ | $3.78E-03$ | $2.72E-08$ | $1.45E-13$ | 0 |
| 0.4 | 0.379948 | $4.32E-04$ | $2.81E-03$ | $1.65E-08$ | $1.17E-13$ | $1.94E-16$ |
| 0.5 | 0.462117 | $8.41E-04$ | $9.80E-04$ | $1.31E-08$ | $3.28E-13$ | $3.20E-16$ |
| 0.6 | 0.537049 | $2.94E-05$ | $7.93E-03$ | $1.98E-08$ | $4.97E-13$ | $1.24E-16$ |
| 0.7 | 0.604367 | $3.35E-04$ | $9.44E-03$ | $2.52E-08$ | $6.32E-13$ | $1.58E-16$ |
| 0.8 | 0.664036 | $5.44E-04$ | $1.17E-02$ | $2.94E-08$ | $7.36E-13$ | $1.84E-16$ |
| 0.9 | 0.716297 | $6.56E-09$ | $3.96E-02$ | $3.23E-08$ | $8.12E-13$ | $1.94E-16$ |
| 1.0 | 0.761594 | $2.53E-06$ | $2.95E-02$ | $2.63E-08$ | $4.62E-13$ | $1.99E-16$ |

**جدول (1) الحلول العددية الموافقة لقيمة $\alpha = 1$ باستخدام $LWM$**

**مثال (2):**

$$D^{\alpha}y(t) = 1 - y^2(t) \;\; ; \;\; 0 < \alpha \leq 1$$

ضمن الشرط $y(0) = 0$

إن الحل الدقيق للمعادلة معطى عندما $\alpha = 1$ :

$$y(t) = \frac{e^{2t} - 1}{e^{2t} + 1}$$

إن هذه المعادلة هي معادلة ريكاتي التفاضلية الكسرية

بحل المعادلة نجد:

$$y(t) = y(0) + \frac{t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha + 1)} - J^{\alpha} y^{2}(t)$$

لدينا $y(t) = C^{T}\Psi(t)$ فيكون

$$J^{\alpha} y(t) = C^{T} J^{\alpha} \Psi(t) = C^{T} P^{\alpha}_{2^{k-1}M \times 2^{k-1}M} \Psi(t)$$

عندئذ نجد:

$$C^{T}\Psi(t) = \frac{t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha + 1)} - C^{T} P^{2\alpha}_{2^{k-1}M \times 2^{k-1}M} \Psi(t)$$

من خلال حل نظام المعادلات الخطية أعلاه، يمكننا إيجاد المتجه $C$. حيث يتم الحصول على نتائج عددية لمختلف قيم $k, M, \alpha$ .

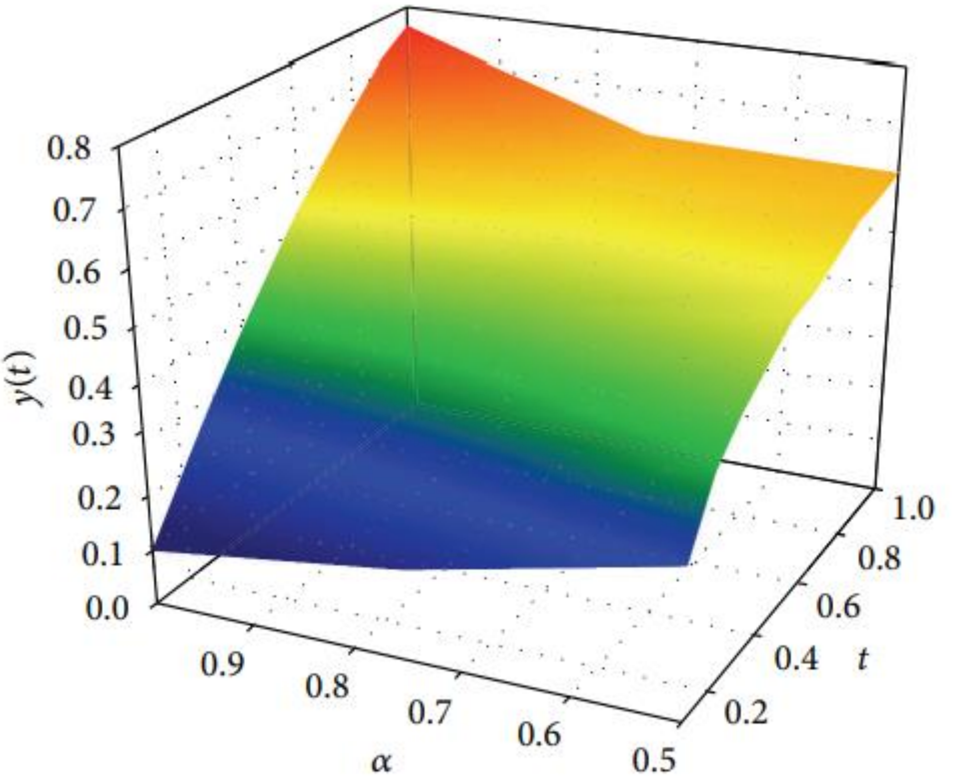
إن الحلول العددية التي حصلنا عليها باستخدام طريقة مويجات ليجندر كانت من أجل القيم الآتية:

$$\alpha = 1, 0.9, 0.8, 0.7, 0.6 \;, k = 2 \;, M = 3$$

يوضح الشكل (2) النتائج العددية التي تم الحصول عليها باستخدام طريقة مويجات ليجندر الموافقة لقيم $k = 2 \;, M = 5$ وجميع قيم $\alpha$ السابقة.

يصف الجدول (2) كفاءة الطريقة المدروسة عن طريق المقارنة مع الطرق المدروسة في [25], [26] من خلال خطأهم المطلق.

نلاحظ أيضاً من الجدول (2) دقة عالية للغاية يتم الحصول عليها من أجل $k = 3 \;, M = 5$ بطريقة مويجات ليجندر وهذا يثبت تقارب نهج هذه الطريقة من الحل الدقيق.




الشكل (2) النتائج العددية باستخدام $(LWM)$ من أجل مختلف قيم $\alpha$ المدروسة

| $t$ | Exact solution | Absolute error in [22] | Absolute error in [20] | LWM $M=2, k=2$ | LWM $M=3, k=2$ | LWM $M=5, k=3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.1 | 0.110295 | $1.23E-15$ | $2.81E-03$ | 0 | 0 | 0 |
| 0.2 | 0.241976 | $5.24E-15$ | $3.83E-04$ | 0 | 0 | 0 |
| 0.3 | 0.395104 | $8.16E-15$ | $1.23E-04$ | 0 | 0 | 0 |
| 0.4 | 0.567812 | $1.15E-12$ | $2.86E-03$ | $1.68E-12$ | $1.66E-15$ | $1.43E-16$ |
| 0.5 | 0.756014 | $6.17E-12$ | $4.38E-04$ | $2.22E-12$ | $2.12E-15$ | $1.66E-16$ |
| 0.6 | 0.953566 | $4.55E-11$ | $5.19E-02$ | $1.15E-12$ | $1.10E-15$ | $1.54E-16$ |
| 0.7 | 1.152946 | $7.57E-10$ | $2.14E-02$ | $1.27E-12$ | $1.11E-15$ | $1.33E-16$ |
| 0.8 | 1.346363 | $6.33E-09$ | $1.42E-02$ | $1.87E-12$ | $2.01E-15$ | $1.75E-16$ |
| 0.9 | 1.526911 | $3.67E-08$ | $6.98E-03$ | $1.93E-12$ | $2.66E-15$ | $1.87E-16$ |
| 1.0 | 1.689498 | $1.64E-07$ | $4.96E-03$ | $1.56E-12$ | $1.66E-15$ | $1.64E-16$ |

جدول (2) الحلول العددية الموافقة لقيمة $\alpha = 1$ باستخدام $LWM$

**الاستنتاجات والتوصيات:**

لقد تم في هذا العمل تقديم طريقة عددية باســـتخدام مويجات ليجندر $(LWM)$ لحل معادلة ريكاتي التفاضــلية الكســرية وذلك بتحويلها إلى جملة معادلات جبرية غير خطية يســهل حلها، حيث أكدت الطريقة على وحدانية ووجود حل لمعادلة ريكاتي التفاضــلية الكســرية مع ضــمان وجود شــرط ابتدائي، وتوثّق فعالية الطريقة المدروســـة من خلال مقارنة النتائج التي حصـــلنا عليها باســـتخدام $(LWM)$ مع طرق عددية أخرى وملاحظة أن الطريقة المدروسة تعطي نتائج متقاربة ودقيقة أكثر.

يوصى بتوسيع هذه الدراسة لتشمل معادلات تفاضلية من نماذج أخرى وبشروط حدية معممة، والعمل على صيغ عددية تعطي نتائج دقيقة بوقت زمني أقل.

المراجع(*References*):

[**1**]- Tavazoei, M. S., Haeri, M., Jafari, S., Bolouki, S., & Siami, M. (2008). Some applications of fractional calculus in suppression of chaotic oscillations. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, *55*(11), 4094-4101.

[**2**]- Shawagfeh, N. T. (2002). Analytical approximate solutions for nonlinear fractional differential equations. *Applied Mathematics and Computation*, *131*(2-3), 517-529.

[**3**]- Das, S. (2009). Analytical solution of a fractional diffusion equation by variational iteration method. *Computers & Mathematics with Applications*, *57*(3), 483-487.

[**4**]- Z. Odibat and S. Momani, Generalized differential transform method: Application to differential equations of fractionalorder,Appl. Math. Comput. 197 (2008), pp. 467–477.

[**5**]- Odibat, Z. M., & Shawagfeh, N. T. (2007). Generalized Taylor's formula. *Applied Mathematics and Computation*, *186*(1), 286-293.

[**6**]- Saadatmandi, A., & Dehghan, M. (2010). A new operational matrix for solving fractional-order differential equations. *Computers & mathematics with applications*, *59*(3), 1326-1336.

[**7**]- Dehghan, M., Manafian, J., & Saadatmandi, A. (2010). Solving nonlinear fractional partial differential equations using the homotopy analysis method. *Numerical Methods for Partial Differential Equations: An International Journal*, *26*(2), 448-479.

[**8**]- Momani, S., & Odibat, Z. (2007). Numerical comparison of methods for solving linear differential equations of fractional order. *Chaos, Solitons & Fractals*, *31*(5), 1248-1255.

[**9**]- Podlubny, I. (1997). The Laplace transform method for linear differential equations of the fractional order. *arXiv preprint funct-an/9710005*.

[**10**]- Oldham, K., & Spanier, J. (1974). *The fractional calculus theory and applications of differentiation and integration to arbitrary order*. Elsevier

[11]- Odibat, Z., & Momani, S. (2008). Numerical methods for nonlinear partial differential equations of fractional order. *Applied Mathematical Modelling*, *32*(1), 28-39.

[**12**]- Sarikaya, M. Z., & Ogunmez, H. (2012, January). On new inequalities via Riemann-Liouville fractional integration. In *Abstract and applied analysis* (Vol. 2012). Hindawi P2.

[13]- Balaji, S. (2014). Legendre wavelet operational matrix method for solution of Riccati differential equation. *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, *2014*.

[**14**]- Jafari, H., Yousefi, S. A., Firoozjaee, M. A., Momani, S., & Khalique, C. M. (2011). Application of Legendre wavelets for solving fractional differential equations. *Computers & Mathematics with Applications*, *62*(3), 1038-1045.

[**15**]- Chen, Y. M., Wei, Y. Q., Liu, D. Y., & Yu, H. (2015). Numerical solution for a class of nonlinear variable order fractional differential equations with Legendre wavelets. *Applied Mathematics Letters*, *46*, 83-88.

[**16**]- Razzaghi, M., & Yousefi, S. (2001). The Legendre wavelets operational matrix of integration. *International Journal of Systems Science*, *32*(4), 495-502.

[**17**]- Razzaghi, M., & Yousefi, S. (2001). The Legendre wavelets operational matrix of integration. *International Journal of Systems Science*, *32*(4), 495-502.

[**18**]- Li, Y., & Sun, N. (2011). Numerical solution of fractional differential equations using the generalized block pulse operational matrix. *Computers & Mathematics with Applications*, *62*(3), 1046-1054

[**19**]- Gorenflo, R., Luchko, Y. F., & Umarov, S. R. (2000). On the Cauchy and multi-point problems for partial pseudo-differential equations of fractional order. *Fractional Calculus and Applied Analysis*, *3*(3), 249-276.

[**20**]- Balaji, S. (2015). Legendre wavelet operational matrix method for solution of fractional order Riccati differential equation. *Journal of the Egyptian Mathematical Society*, *23*(2), 263-270

[**21**]- Merdan, M. (2012). On the solutions fractional Riccati differential equation with modified Riemann-Liouville derivative. *International Journal of differential equations*, *2012*.

[**22**]- Koeller, R. (1984). Applications of fractional calculus to the theory of viscoelasticity

[**23**]- Z. Odibat and S. Momani, Generalized differential transform method: Application to differential equations of fractionalorder,Appl. Math. Comput. 197 (2008), pp. 467–477

[**24**]- Odibat, Z., Momani, S., & Erturk, V. S. (2008). Generalized differential transform method: Application to differential equations of fractional order. *Applied Mathematics and Computation*, *197*(2), 467-477.

[**25**]- Raja, M. A. Z., Khan, J. A., & Qureshi, I. M. (2010). A new stochastic approach for solution of Riccati differential equation of fractional order. *Annals of Mathematics and Artificial Intelligence*, *60*(3), 229-250.

[**26**]- Sweilam, N. H., Khader, M. M., & Mahdy, A. M. S. (2012). Numerical studies for solving fractional Riccati differential equation. *Applications and Applied Mathematics*, *7*(2), 595-608.

[**27**]- https://www.researchgate.net/publication/327396011_albab_alawl_aldwal_alkhast_Special_Functions.

**قواعد البيانات التي تمت فهرسة المجلة ضمنها**

جامعة حلب في المناطق المحرّرة

Aleppo university in the liberated areas