ISSN: 2957 - 8108

مجلة بحوث

جامعة حلب في المناطق المحررة

العدد الرابع

21 / 5 / 1444 هـ - 15 / 12 / 2022 م

علميّة - ربعيّة - محكّمة

تصدر عن

جامعة حلب في المناطق المحرّرة

بسم الله الرحمن الرحيم

مجلة جامعة حلب في المناطق المحررة

مجلّة علميّة محكّمة فصليّة، تصدر باللغة العربية، تختص بنشر البحوث العلمية والدراسات الأكاديمية في مختلف التخصصات، تتوفر فيها شروط البحث العلمي في الإحاطة والاستقصاء ومنهج البحث العلمي وخطواته، وذلك على صعيدي العلوم الإنسانية والاجتماعية والعلوم الأساسية والتطبيقية.

رؤية المجلة:

تتطلع المجلة إلى الريادة والتميز في نشر الأبحاث العلميّة.

رسالة المجلة:

الإسهام الفعّال في خدمة المجتمع من خلال نشر البحوث العلميّة المحكّمة وفق المعايير العلمية العالمية.

أهداف المجلة:

- نشر العلم والمعرفة في مختلف التخصصات العلميّة.
- توطيد الشراكات العلمية والفكرية بين جامعة حلب في المناطق المحررة ومؤسسات المجتمع المحلي والدولي.
- أن تكون المجلة مرجعاً علمياً للباحثين في مختلف العلوم.

الرقم المعياري الدولي للمجلة ISSN: **2957-8108**

الموقع الالكتروني للمجلة: https://journal-fau.com **البريد الالكتروني:** info@journal-fau.com

معايير النشر في المجلة:

1- تنشر المجلة الأبحاث والدراسات الأكاديمية في مختلف التخصصات العلميّة باللغة العربية.

2- تنشر المجلة البحوث التي تتوفر فيها الأصالة والابتكار، واتباع المنهجية السليمة، والتوثيق العلمي مع سلامة الفكر واللغة والأسلوب.

3- تشترط المجلة أن يكون البحث أصيلاً وغير منشور أو مقدم لأي مجلة أخرى أو موقع آخر.

4- يترجم عنوان البحث واسم الباحث والمشاركين أو المشرفين إن وجدوا إلى اللغتين التركية والانكليزية.

5- يرفق بالبحث ملخص عنه باللغات الثلاث العربية والإنكليزية والتركية على ألا يتجاوز 200-250 كلمة، وبخمس كلمات مفتاحية مترجمة.

6- يلتزم الباحث بتوثيق المراجع والمصادر وفقاً لنظام جمعية علم النفس الأمريكية (**APA7**).

7- يلتزم الباحث ألا يزيد البحث على 20 صفحة.

8-ترسل البحوث المقدمة لمحكمين متخصصين، ممن يشهد لهم بالنزاهة والكفاءة العلمية في تقييم الأبحاث، ويتم هذا بطريقة سرية، ويعرض البحث على محكّم ثالث في حال رفضه أحد المحكّمين.

9- يلتزم الباحث بإجراء التعديلات المطلوبة خلال 15 يوماً.

10- يبلغ الباحث بقبول النشر أو الاعتذار عنه، ولا يعاد البحث إلى صاحبه إذا لم يقبل، ولا تقدم أسباب رفضه إلى الباحث.

11- يحصل الباحث على وثيقة نشر تؤكد قبول بحثه للنشر بعد موافقة المحكمين عليه.

12- تعبّر الأبحاث المنشورة في المجلة عن آراء أصحابها، لا عن رأي المجلة، ولا تكون هيئة تحرير المجلة مسؤولة عنها.

جدول المحتوى:

خواص بعض المثاليات في الحلقات الثلاثية النوثرية

إعداد:

أ. مرهف العبد الله　　　د. جهاد الجرادين

ملخص البحث:

في هذا البحث، درسنا الحلقات الثلاثية والمثاليات فيها، وعرّفنا الحلقات الثلاثية النوثرية على غرار ما هو معروف في الحلقات العادية، وحاولنا إدخال خواص بعض المثاليات المعروفة في الحلقات العادية على الحلقات الثلاثية النوثرية، وتوصلنا إلى عدة نتائج أهمها: كل مثالية في حلقة ثلاثية نوثرية هي تقاطع منته من المثاليات غير القابلة للاختزال، كل مثالية غير قابلة للاختزال في حلقة ثلاثية تبديلية نوثرية هي مثالية ابتدائية، و لتكن T حلقة ثلاثية تبديلية واحدية بوليانية عندئذٍ فإن T نوثرية إذا وفقط إذا، كانت كل مثالية أولية تماماً فيها منتهية التوليد.

كلمات مفتاحية: حلقة ثلاثية، حلقة ثلاثية نوثرية، حلقة ثلاثية بوليانية.

Properties of some Ideals in Noetherian Ternary Rings

Prepared by:

T.Murhaf Alabdullah Dr. Jehad Jaraden

Abstract:

In this research, we have studied a ternary rings and the ideals in them. And we defined a noetherian ternary rings similar to what is known in rings. And we tried to enter properties of some of ideals, the well-known in rings on the noetherian ternary rings. And we reached to the most results that important: Each ideal in a Noetherian ternary ring is a finite intersection of irreducible ideals. Each irreducible ideal in a Noetherian ternary ring is primary ideal. If T is a Boolean commutative unitary ternary ring, then T is Noetherian if and only if every completely prime ideal in it is finitely generated.

Keywords: Ternary Ring, Noetherian Ternary Ring, Boolean Ternary Ring.

Noseri'nin üçlü halkalardaki bazı ideallerin özellikleri

Hazırlayanlar:

Öğr. Murhaf Al-Abdullah Dr. Cihad Al-Ceradin

Araştırma özeti:

Bu araştırmamızda üçlü halkaları ve içlerindeki idealleri inceledik, adi halkalarda bilinenlere benzer Noseri'nin üçlü halkaları tanımladık ve Noseri'nin üçlü halkalara düzenli halkalardaki iyi bilinen bazı ideallerin özelliklerini tanıtmaya çalıştık ve en önemlileri olan birkaç sonuca ulaştık:

Noseri üçlemesindeki her ideal, indirgenemez ideallerin sonlu bir kesişimidir, Noseri değişmeli bir üçlü döngüdeki her indirgenemez ideal, bir temel idealdır, Eğer T bir Boolean değişmeli üniter üçlü halkaysa, o zaman ve ancak içindeki her tamamen asal ideal sonlu olarak üretiliyorsa T Noseri'dir.

Anahtar Kelimeler: Üçlü Halka, Noseri'nin Üçlü Halkası, Boolean Üçlü Halka.

مقدمة:

ظهر مفهوم الحلقة الثلاثية على يد الباحث *W. G. Lister* عام 1971م في البحث [3]، ونشرت أبحاث عن هذه الحلقات وبعض العناصر الخاصة فيها والمثاليات والانتظام فيها، وظهر بحث واحد يُعرّف شبه الحلقات الثلاثية النوثرية وقدّم نتيجة واحدة فيها على غرار ما هو معروف في الحلقات النوثرية[6]، وقد تناول البحث دراسة الحلقات الثلاثية والمثاليات فيها ودراسة الخواص المتنوعة المعروفة في الحلقات النوثرية، على الحلقات الثلاثية.

الهدف من البحث:

يهدف هذا البحث النظري إلى دراسة الحلقات الثلاثية النوثرية وإيجاد خواص أهم المثاليات فيها، ما يؤدي إلى فتح آفاق جديدة للباحثين في الجبر بوجه عام.

طريقة البحث:

لقد استخدمنا طريقة جبرية استنباطية تعتمد على المراجع العلمية التخصصية في استخلاص النتائج.

1 . تعاريف و أساسيات:

تعريف 1.1 [5] لتكن T مجموعة ما غير خالية، معرف عليها عمليتان داخليتان، الأولى ثنائية تدعى الجمع ونرمز لها بـ $(+)$، والعملية الثانية ثلاثية تدعى الضرب ونرمز لها بـ $(.)$. يقال إن $(T\,,+\,,.)$ حلقة ثلاثية، إذا كانت $(T\,,+)$ زمرة تبديلية، وكانت عملية الضرب الثلاثي تحقق الشروط الآتية:

1- $(abc)de = a(bcd)e = ab(cde)$
2- $(a+b)cd = acd + bcd$
3- $a(b+c)d = abd + acd$
4- $ab(c+d) = abc + abd$

وذلك أياً كان $a\,,b\,,c\,,d\,,e \in T$. وسنرمز بـ T للحلقة الثلاثية $(T\ ,\ +\ ,\ .)$.

تعريف 2.1 [5] إذا كانت T حلقة ثلاثية، فإننا نسمي عنصر الوحدة في الزمرة $(T\ ,\ +)$ الذي سنرمز له بـ 0 بصفر الحلقة الثلاثية T وهو يحقق:

$$0xy = x0y = xy0 = 0 \quad \& \quad 0 + x = x + 0 = x\ \forall\ x, y \in T$$

تعريف 3.1 [4] لتكن T حلقة ثلاثية، إذا وجد عنصر $e \in T$ بحيث يكون:

$$eex = exe = xee = x, \qquad \forall x \in T$$

يسمى e عنصر الوحدة في الحلقة الثلاثية T وتدعى T حلقة ثلاثية بعنصر وحدة. وفي هذه الحالة يتحقق: $xye = xey = exy \ \forall x, y \in T$ لأن:

$$xye = x(eye)e = xe(yee) = xey = (eex)ey = e(exe)y = exy$$

تعريف 4.1 [5] يقال عن الحلقة الثلاثية T إنها حلقة ثلاثية تبديلية إذا تحقق الشرط الآتي:

$$abc = cba = acb = bca = cab = bac \quad \forall \ a, b, c \in T$$

تعريف 5.1 [4] لتكن $(S,+)$ زمرة جزئية من $(T,+)$، يقال عن S إنها حلقة جزئية ثلاثية من T، إذا حققت الشرط الآتي: $abc \in S \quad \forall \ a, b, c \in S$

مثال 6.1 [7] المجموعة T المؤلفة من عنصر واحد $\{0\}$ مع عملية جمع ثنائية معرّفة بالشكل $0+0 = 0$ وعملية ضرب ثلاثية معرفة بالشكل $0.0.0 = 0$ هي حلقة ثلاثية. تسمى هذه الحلقة الثلاثية بالحلقة الثلاثية المبتذلة أو الحلقة الثلاثية الصفرية.

مثال 7.1 [7] المجموعة $T = \{\dots, -2\mathrm{i}, -\mathrm{i}, 0, \mathrm{i}, 2\mathrm{i}, \dots\}$ حلقة ثلاثية بالنسبة لعملية الجمع العادي والضرب الثلاثي العقدي.

مثال 8.1 [7] مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة قياس 5 $Z_5 = \{0,1,2,3,4\}$ هي حلقة ثلاثية تبديلية واحدية بالنسبة لعملية الجمع العادي والضرب الثلاثي العادي قياس 5.

تعريف 9.1 [6,9] لتكن T حلقة ثلاثية، وليكن x عنصراً من T. يقال عن x إنه عنصر جامد إذا تحقق: $xxx = x^3 = x$ ونرمز بـ Id_T لمجموعة العناصر الجامدة في T.

تعريف 10.1 [6,9] لتكن T حلقة ثلاثية، وليكن a عنصراً من T. يقال عن a إنه عنصر منتظم في T, إذا وجد عنصر x من T بحيث إن: $a = a.x.a$ ونرمز بـ Reg_T لمجموعة العناصر المنتظمة في T. ويقال عن T إنها حلقة ثلاثية منتظمة إذا كان $Reg_T = T$.

تعريف 11.1 [3] لتكن T حلقة ثلاثية، وليكن a عنصراً من T. يقال عن a إنه عنصر عديم القوة في T، إذا وجد عدد فردي موجب n بحيث إن: $a^n = 0$ ونرمز بـ N_T لمجموعة العناصر عديمة القوة في T.

تعريف 12.1 [1,8] لتكن T حلقة ثلاثية، ولتكن $(A , +)$ زمرة جزئية من الزمرة $(T , +)$.

- يقال عن A إنها مثالية يسارية في T إذا تحقق: $b.c.a \in A, \forall \ a \in A \ \& \ b, c \in T$
- يقال عن A إنها مثالية يمينية في T إذا تحقق: $a.b.c \in A, \forall \ a \in A \ \& b, c \in T$

– يقال عن A إنها مثالية جانبية في T إذا تحقق: $b.a.c \in A, \forall a \in A \;\&\, b, c \in T$

– يقال عن A إنها مثالية من الجانبين في T إذا كانت A مثالية يمينية ويسارية معاً.

– يقال عن A إنها مثالية في T إذا كانت A مثالية يمينية ويسارية وجانبية معاً.

– يقال عن مثالية A من T إنها مثالية فعلية إذا كانت $T \neq A$.

– يقال عن مثالية فعلية A من T إنها مثالية جامدة في T إذا تحقق: $A^3 = A$.

تعريف 13.1 [1,7] لتكن T حلقة ثلاثية ولتكن P مثالية فعلية في T.

– يقال عن P إنها مثالية شبه أولية في T إذا تحقق:

$$A^3 \subseteq P \;\Rightarrow\; A \subseteq P$$

حيث A مثالية من T.

– يقال عن P إنها مثالية شبه أولية تماماً في T إذا تحقق:

$$a^3 \in P \;\Rightarrow\; a \in P, \quad \forall\, a \in T$$

– يقال عن P إنها مثالية أولية في T إذا تحقق:

$$A\,B\,C \subseteq P \Rightarrow A \subseteq P \text{ أو } B \subseteq P \text{ أو } C \subseteq P$$

وذلك لكل ثلاث مثاليات A, B, C من T.

– يقال عن P إنها مثالية أولية تماماً في T إذا تحقق:

$$a\,b\,c \in P \Rightarrow a \in P \text{ أو } b \in P \text{ أو } c \in P$$

وذلك لكل ثلاثة عناصر a, b, c من T.

– يقال عن P إنها مثالية جامدة في T إذا تحقق: $P^3 = P$

تعريف 14.1 [1] لتكن T حلقة ثلاثية و من T، يقال عن I إنها مثالية ابتدائية إذا تحقق الشرط:

$$A\,B\,C \subseteq I \Rightarrow A \subseteq I \text{ أو } B \subseteq I \text{ أو } C^n \subseteq I;$$ n عدد فردي موجب

وذلك لكل ثلاث مثاليات A, B, C من T.

تعريف 15.1 [7] يقال عن المثالية M من الحلقة الثلاثية T إنها أعظمية إذا لم تكن محتواة في أي مثالية فعلية من T، أي إذا تحقق الشرط:

$M \subseteq M' \subseteq T \Rightarrow M = M' \ or \ M' = T; T$ مثالية من M'

تعريف 16.1 [4] لتكن T حلقة ثلاثية و I مثالية من T، يقال عن I إنها مثالية غير قابلة للاختزال إذا تحقق الشرط:

$I = J \cap K \cap L$ عندئذٍ $I = J \ or \ I = K \ or \ I = L$ وذلك لأي ثلاث مثاليات J, K, L من T.

تعريف 17.1 [2]:

إذا كانت T حلقة ثلاثية وكان $a \in T$ فإننا نرمز بـ aTT للمجموعة:

$$aTT = \{\sum_{fin} ax_i y_i \ ; \ x_i, y_i \in T\}$$

وبالمثل يُعرف كل من TTa و TaT و $TTaTT$.

تعريف 18.1 [5]:

لتكن T حلقة ثلاثية و $a \in T$، ولتكن $\mathbb{Z}_0^+$ مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة مع الصفر, عندئذٍ:

i. $< a >_l = TTa + \mathbb{Z}_0^+ a$ مثالية يسارية مولدة بالعنصر a. (تسمى مثالية يسارية رئيسة).

ii. $< a >_r = aTT + \mathbb{Z}_0^+ a$ مثالية يمينية مولدة بالعنصر a. (تسمى مثالية يمينية رئيسة).

iii. $< a >_t = TTa + aTT + TTaTT + \mathbb{Z}_0^+ a$
مثالية من الجانبين مولدة بالعنصر a. (تسمى مثالية من الجانبين رئيسة).

iv. $< a >_m = TaT + TTaTT + \mathbb{Z}_0^+ a$
مثالية جانبية مولدة بالعنصر a. (تسمى مثالية جانبية رئيسة).

$< a > = TTa + aTT + TaT + TTaTT + \mathbb{Z}_0^+ a$ مثالية مولدة بالعنصر a. (تسمى مثالية رئيسة).

تعريف 19.1 [2] لتكن T حلقة ثلاثية و I مثالية من T، يقال عن I إنها عامل مباشر في T إذا وجدت مثالية J من T بحيث إن: $T = I \oplus J$

مبرهنة 20.1 [2]:

لتكن T حلقة ثلاثية واحدية عندئذٍ: T منتظمة إذا وفقط إذا كانت كل مثالية يمينية (يسارية) رئيسة فيها مولدة بعنصر جامد.

مبرهنة 21.1 [2]:

لتكن T حلقة ثلاثية واحدية عندئذٍ: T منتظمة إذا وفقط إذا كانت كل مثالية يمينية (يسارية) منتهية التوليد في T مولدة بعنصر جامد.

مبرهنة 22.1 [2]:

لتكن T حلقة ثلاثية واحدية عندئذٍ:

T منتظمة إذا وفقط إذا، كانت كل مثالية يمينية (يسارية) منتهية التوليد في T هي عامل مباشر في T.

ملاحظة تمهيدية 23.1:

1) لتكن T حلقة ثلاثية واحدية و $a \in T$، عندئذٍ:

$< a >_r = aTT$ و $< a >_l = TTa$ و $< a >_t = TTa + aTT + TTaTT$ و

$< a >_m = TaT + TTaTT$ و $< a > = TTa + aTT + TaT + TTaTT$

لأنه: من الواضح تحقق الاحتواء الآتي دوماً:

$$aTT \subseteq aTT + \mathbb{Z}_0^+ a = < a >_r$$

ليكن e عنصر الوحدة في T عندئذٍ يكون:

$$\begin{aligned} z \in < a >_r \Rightarrow z &= \sum_{fin} a x_i y_i + na \,;\; x_i, y_i \in T \,, n \in \mathbb{Z}_0^+ \\ &= \sum_{fin} a x_i y_i + a + a + \dots + a \\ &= \sum_{fin} a x_i y_i + aee + aee + \dots + aee \in aTT \end{aligned}$$

وبالتالي $< a >_r \subseteq aTT$ ومنه نجد $< a >_r = aTT$.

وبنفس الطريقة نبرهن باقي الحالات.

2) لتكن T حلقة ثلاثية تبديلية، ولتكن I , J مثاليات يمينية منها عندئذٍ نعرّف المجموعة:

$(I:J)=\{x\in T;\ JJx\subseteq I\}$ وهي مثالية يمينية في T.

لأن: لدينا: $JJ0=\{0\}\subseteq I\Rightarrow 0\in(I:J)\Rightarrow(I:J)\neq\emptyset$

$$\forall r,s\in T\ ,\forall x,y\in(I:J)\Rightarrow x,y\in T;JJx\subseteq I\ ,JJy\subseteq I$$

$$\Rightarrow\sum_{fin}a_ib_ix\in I\wedge\sum_{fin}p_iq_iy\in I\ ,a_i\ ,b_i,p_iq_i\in J\Rightarrow$$

$$p_iq_i\left(\sum_{fin}a_ib_ix\right)\in I\wedge a_ib_i(\sum_{fin}p_iq_iy)\in I\Rightarrow \text{ لكل } i$$

$$p_iq_i\left(\sum_{fin}a_ib_ix\right)-\ a_ib_i(\sum_{fin}p_iq_iy)\in I\Rightarrow\sum_{fin}a_ib_ip_iq_i(x-\ y)\in I$$

$$\Rightarrow(x-y)\in(I:J)$$

ولدينا $\sum_{fin}a_ib_ix\in I\Rightarrow\left(\sum_{fin}a_ib_ix\right)rs\in I\Rightarrow\sum_{fin}a_ib_i\,(xrs)\in I$

$$\Rightarrow xrs\in(I:J)$$

إذاً $(I:J)$ مثالية يمينية في T.

وبالمثل نعرّف المثالية اليسارية (الجانبية) $(I:J)$ عندما J , I مثاليات يسارية (جانبية) على الترتيب.

3) لتكن T حلقة ثلاثية، ولتكن A , B , C ثلاث مجموعات منها فإننا نرمز

بـ ABC للمجموعة: $ABC=\{\sum_{fin}a_ib_ic_i\ ;\ a_i\in A,b_i\in B,\ c_i\in C\}$

4) نقول عن حلقة ثلاثية إنها بوليانية إذا كانت جميع عناصرها جامدة.

مثال: $Z_6=\{0,1,2,3,4,5\}$ مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة قياس 6 هي حلقة ثلاثية تبديلية واحدية بوليانية بالنسبة لعملية الجمع العادي والضرب الثلاثي العادي قياس 6.

2 . النتائج الأساسية للبحث

تعريف 1.2

نقول عن الحلقة الثلاثية T إنها نوثرية إلى اليسار (اليمين، جانبية)، إذا كانت T تحقق شرط السلاسل الصاعدة للمثاليات اليسارية (اليمينية، الجانبية). أي من أجل أي سلسلة من المثاليات اليسارية (اليمينية، الجانبية) $I_1 \subseteq I_2 \subseteq \cdots$ يوجد عدد صحيح موجب n بحيث يتحقق $I_n = I_{n+1} = I_{n+2} = \cdots$

– نقول عن T إنها نوثرية إذا كانت نوثرية إلى اليمين واليسار وجانبية.

– نقول عن T إنها نوثرية من الجانبين إذا كانت نوثرية إلى اليمين واليسار.

نتيجة 2.2 كل مثالية أولية في حلقة ثلاثية T هي مثالية غير قابلة للاختزال.

البرهان: لتكن P مثالية أولية من T ولنبرهن أنها غير قابلة للاختزال.

لتكن $P = J \cap K \cap L$ وذلك لأجل ثلاث مثاليات J, K, L من T.

عندئذٍ $JKL \subseteq J \cap K \cap L \subseteq P$ وبما أن P أولية فإن: $J \subseteq P \;\; or \;\; K \subseteq P \;\; or \;\; L \subseteq P$

ومن جهة ثانية لدينا:

$$P = J \cap K \cap L \Longrightarrow P \subseteq J \;\; or \;\; P \subseteq K \; or \;\; P \subseteq K$$

وبالتالي ينتج:

$$P = J \;\; or \;\; P = K \;\; or \;\; P = L \;\blacksquare$$

مبرهنة 3.2 لتكن T حلقة ثلاثية نوثرية عندئذٍ كل مثالية من T هي تقاطع منته من المثاليات غير القابلة للاختزال.

البرهان: لنفرض جدلاً أن S مجموعة المثاليات من T والتي ليست تقاطعاً منتهياً من المثاليات غير القابلة للاختزال.

بما أن T نوثرية فإن S تملك عنصراً أعظمياً وليكن I ومنه I قابلة للاختزال لذلك $I = J \cap K \cap L$ لأجل ثلاث مثاليات J, K, L من T كلها أكبر تماماً من I.

يشير العنصر الأعظمي إلى أن كلاً من J,K,L ليست من S، وبالتالي كل منها تقاطع منته لمثاليات غير قابلة للاختزال.

وبالتالي I أيضاً تقاطع منته لمثاليات غير قابلة للاختزال وهذا تناقض، وبالتالي يتم المطلوب.

مبرهنة 4.2 لتكن T حلقة ثلاثية واحدية، عندئذ الشرطان الآتيان متكافئان:

1) T حلقة ثلاثية نوثرية إلى اليمين (اليسار , جانبية).

2) كل مثالية يمينية (يسارية, جانبية) من T تكون منتهية التوليد.

البرهان: $(1) \Rightarrow (2)$

لتكن I مثالية يمينية من T وليكن $x_1 \in I$ عندئذ $x_1TT \subseteq I$ فإذا كان $x_1TT = I$ فيكون تم المطلوب.

وإذا كان $x_1TT \subsetneq I$ عندئذ يوجد $x_2 \in I$ بحيث $x_2 \notin x_1TT$ ونحصل على أن: $x_1TT + x_2TT \subseteq I$ فإذا كان $x_1TT + x_2TT = I$ يكون تم المطلوب وإذا كان $x_1TT + x_2TT \subsetneq I$ فإنه يوجد $x_3 \in I$ وبحيث $x_3 \notin x_1TT + x_2TT$ ونحصل على أن: $x_1TT + x_2TT + x_3TT \subseteq I$

ونتابع بنفس الخطوات فتتشكل لدينا السلسلة الصاعدة من المثاليات:

$$x_1TT \subset x_1TT + x_2TT \subset x_1TT + x_2TT + x_3TT \subset \ldots\ldots$$

وبما أن T نوثرية إلى اليمين فإنه يوجد $n \in \mathbb{N}$ تتوقف عنده هذه السلسلة، أي أن:

$$x_1TT + x_2TT + x_3TT + \ldots\ldots + x_nTT = I$$

ومنه نجد أن I منتهية التوليد.

$(2) \Rightarrow (1)$: بفرض كل مثالية يمينية من T منتهية التوليد ولتكن $I_1 \subseteq I_2 \subseteq I_3 \subseteq \ldots\ldots$ سلسلة صاعدة من المثاليات اليمينية من T، ولنضع $I = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n$ عندئذ نجد بسهولة أن I مثالية يمينية في T.

لأنه: $\forall\, x, y \in I = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n \Rightarrow \exists\, n_1, n_2 \in \mathbb{N}\ ; x \in I_{n_1}\, , y \in I_{n_2}$

وبما أن $I_{n_1}, I_{n_2} \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n$، وهما مثاليتان من سلسلة المثاليات الصاعدة فسوف تكون إحداهما محتواة في الأخرى، ولتكن $I_{n_1} \subseteq I_{n_2}$، وبالتالي ينتج:

$$x, y \in I_{n_2} \Rightarrow x - y \in I_{n_2} \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n = I$$

$$\forall\, r, s \in T\, , \forall\, x \in I = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n \Rightarrow \exists\, I_{n_1} \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n\ \ ; x \in I_{n_1}\ \ \Rightarrow xrs \in I_{n_1} \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n = I$$

إذاً I مثالية يمينية، فهي منتهية التوليد أي $I = x_1TT + x_2TT + x_3TT + \ldots\ldots + x_nTT$

ونلاحظ أن:

$x_1 \in I$ لأن $I = x_1ee + 0 + 0 + \ldots\ldots + 0$ وبالتالي

$$x_1 \in I = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n \Rightarrow \exists n_1 \in \mathbb{N}; x_1 \in I_{n_1}$$

بالمثل نجد:

$$x_2 \in I = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n \Rightarrow \exists n_2 \in \mathbb{N}; x_2 \in I_{n_2} \ldots\ldots x_n \in I = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n \Rightarrow \exists n_n \in \mathbb{N}; x_n \in I_{n_n}$$

فإذا كان $m = \max\{n_1, n_2, \ldots\ldots, n_n\}$ عندئذ نجد أن $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n \in I_m$

ومنه نجد أن $I = x_1TT + x_2TT + x_3TT + \ldots\ldots + x_nTT \subseteq I_m \subseteq I$

ومنه نجد $I = I_m \subseteq I_{m+1} \subseteq I$ وبالتالي $I = I_m = I_{m+1} = \ldots\ldots$

أي السلسلة المفروضة متوقفة عند m ولذلك فإن T نوثرية إلى اليمين.

وبطريقة مماثلة نبرهن أن T حلقة ثلاثية نوثرية إلى اليسار (جانبية).

نتائج 5.2:

1) إذا كانت T حلقة ثلاثية جميع مثالياتها اليمينية هي مثاليات رئيسة فإن T حلقة ثلاثية نوثرية إلى اليمين.

2) كل حلقة ثلاثية رئيسة هي حلقة ثلاثية نوثرية.

مبرهنة 6.2: لتكن T حلقة ثلاثية واحدية عندئذ إذا كانت T نوثرية إلى اليمين (اليسار) ومنتظمة فإن كل مثالية يمينية (يسارية) من T تكون مولدة بجامد وبالتالي تكون عاملاً مباشراً في T.

البرهان: بما أن T نوثرية إلى اليمين (اليسار) فإن كل مثالية يمينية (يسارية) فيها تكون منتهية التوليد، وبما أن T منتظمة (حسب المبرهنة 21.1) تكون كل مثالية يمينية (يسارية) مولدة بجامد، وبالتالي تكون عاملاً مباشراً في T (حسب المبرهنة 22.1).

مبرهنة 7.2: لتكن T حلقة ثلاثية تبديلية نوثرية عندئذ كل مثالية غير قابلة للاختزال هي مثالية ابتدائية.

البرهان: لتكن I مثالية غير قابلة للاختزال في T، ولتكن $ABC \subseteq I$، وذلك من أجل ثلاث مثاليات A, B, C من T وبفرض $B \nsubseteq I, C \nsubseteq I$ ولنبرهن أنه يوجد عدد فردي موجب n بحيث $A^n \subseteq I$

بأخذ سلسلة المثاليات الصاعدة في T:

$$(I: A) \subseteq (I: A^3) \subseteq \ldots . \subseteq (I: A^n) \subseteq \ldots .$$

بما أن T نوثرية يوجد n فردي موجب بحيث $(I: A^n) = (I: A^{n+2})$

لدينا $I \subseteq I + A^n A^n T\,,\ I \subseteq I + BCT$

وبالتالي $I \subseteq (I + A^n A^n T) \cap (I + BCT)$

$$\forall x \in (I + A^n A^n T\,) \cap (I + BCT)$$

$$\Rightarrow x = g + \sum_{fin} a_i^n a_i'^n r_i = h + \sum_{fin} b_i c_i d_i\,; g, h \in I, a_i^n, a_i'^n \in A^n,$$
$$b_i \in B,\ c_i \in C, r_i, d_i \in T$$

$$\Rightarrow x a_i a_i a_i' a_i' = (g a_i a_i) a_i' a_i' + \sum_{fin} a_i^{n+2} a_i'^{n+2} r_i$$

$$= (h a_i a_i) a_i' a_i' + (\sum_{fin} b_i c_i d_i) a_i a_i a_i' a_i'$$

$$\Rightarrow \sum_{fin} a_i^{n+2} a_i'^{n+2} r_i = (h a_i a_i) a_i' a_i' + (\sum_{fin} a_i b_i c_i) d_i \, a_i a_i' a_i'$$

$$-(g a_i a_i) a_i' a_i' \in I$$

$$\Rightarrow \text{لكل } i \; r_i \in (I: A^{n+2}) = (I: A^n) \Rightarrow \sum_{fin} a_i^n a_i'^n r_i \in I$$

$$\Rightarrow x = g + \sum_{fin} a_i^n a_i'^n r_i \in I$$

$$\Rightarrow (I + A^n A^n T) \cap (I + BCT) = I$$

بما أن I غير قابلة للاختزال و $B \not\subseteq I, C \not\subseteq I$ إذاً $I = I + A^n A^n T$ وبالتالي $A^n \subseteq I$ إذاً I مثالية ابتدائية.

نتيجة 8.2: لتكن T حلقة ثلاثية تبديلية نوثرية عندئذ كل مثالية أولية هي مثالية ابتدائية.

البرهان: بما أن كل مثالية أولية هي مثالية غير قابلة للاختزال (حسب النتيجة 2.2) وبالتالي فهي مثالية ابتدائية (حسب المبرهنة 7.2).

مبرهنة 9.2: لتكن T حلقة ثلاثية تبديلية واحدية بوليانية عندئذٍ:

T نوثرية إذا وفقط، إذا كانت كل مثالية أولية تماماً فيها منتهية التوليد.

البرهان:

($\Leftarrow$): بما أن T نوثرية فإن أي مثالية فيها منتهية التوليد (حسب المبرهنة 4.2)، وبالتالي أي مثالية أولية تماماً في T منتهية التوليد.

($\Rightarrow$): لنفرض جدلاً أن T ليست نوثرية، ولنفرض أن كل مثالية أولية تماماً في T منتهية التوليد، ولتكن K مجموعة جميع المثاليات في T غير منتهية التوليد، وبالتالي تكون $K \neq \emptyset$ (لأنه إذا كانت

$K=\emptyset$ أصبحت T نوثرية)، وعليه فإن للمجموعة K عنصراً أعظم وليكن I (حسب تمهيدية زمورون)، إذاً I مثالية ليست أولية تماماً في T.

وبالتالي يوجد $x,y,z\notin I$ بينما $xyz\in I$. وبما أن $I\subset <I,yzz>$ و

$I\subset I:<yzz>$ و $x\in I:<yzz>$ كما أن I عنصر أعظم في K، إذاً كل من $<I,yzz>$ و $I:<yzz>$ مثالية منتهية التوليد. فإذا كانت:

$$I:<yzz>=<d_1,d_2,\dots\dots,d_m>,<I,yzz>=<c_1,c_2,\dots\dots,c_n>$$

فإن: $c_i=a_iTT+(yzz)TT\ ;\ a_i\in I\ ,i=1,2,\dots,n$

إذاً $<I,yzz>=<a_1,a_2,\dots\dots,a_n,yzz>$

لتكن $J=<$

$a_1,a_2,\dots\dots,a_n,(yzz)(yzz)d_1,(yzz)(yzz)d_2,\dots\dots,(yzz)(yzz)d_m>$ مثالية في T إذاً $(yzz)(yzz)d_k\in I$ لكل $k=1,2,\dots,m$ وبالتالي يكون $J\subseteq I$.

لكن إذاً كان $b\in I$ فإن $b\in <I,yzz>$ وبالتالي فإن:

$$b=(\textstyle\sum_{i=1}^{n}a_i)TT+\sum_{fin}(yzz)p_jq_j\ ,p_j\ ,q_j\in T$$

لكن $a_i\in I$ لكل i, إذاً $\sum_{fin}(yzz)p_jq_j\in I$ وبالتالي:

$$\Big(\sum_{fin}(yzz)p_jq_j\Big)\Big(\sum_{fin}(yzz)p_jq_j\Big)\Big(\sum_{fin}(yzz)p_jq_j\Big)\in I$$

ومنه $I\supseteq <yzz><yzz>(\sum_{fin}(yzz)p_jq_j)$ وبما أن $yzz\notin I$ فإن p_j أو $q_j\in I:<yzz>$ لكل j

إذاً ليكن $p_j=\sum_{k=1}^{m}d_kr_kr'_k\ \ ,r_k\ ,r'_k\in T$ و عليه فإن:

$$b=\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)TT+\sum_{fin}(yzz)(\sum_{k=1}^{m}d_kr_kr'_k)q_j$$

وبما أن T بوليانية فإن $(yzz)^3=yzz$ وبالتالي:

$$b=\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)TT+\sum_{fin}(yzz)(yzz)(yzz)(\sum_{k=1}^{m} d_k r_k r_k')q_j$$

$$b=\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)TT+\sum_{fin}(yzz)(\sum_{k=1}^{m}(yzz)(yzz)d_k)r_k r_k'\, q_j \in J$$

وبالتالي فإن $J \subseteq I$، إذاً $I = J$, وبالتالي المثالية I منتهية التوليد، وهذا تناقض كون $I \in K$، إذاً T حلقة ثلاثية نوثرية.

نتائج وخاتمة:

عالجنا في هذا البحث خواص أهم المثاليات في الحلقات الثلاثية النوثرية، بهدف التعرف على خواصها كمسألة مناظرة لما هو مدروس في الحلقات العادية، وقد توصلنا إلى إيجاد عدة شروط وخواص تربط هذه المثاليات بعضها ببعض في الحلقات الثلاثية النوثرية، وكانت هذه الخواص مماثلة لنظائرها في الحلقات العادية على الرغم من اختلاف البنيتين الجبريتين لهما، وهنالك بعض الخواص لم تتحقق في الحلقات الثلاثية النوثرية إلا بعد إضافة شرط كما هو الحال في المبرهنة 9.2، حيث قمنا بإضافة شرط البوليانية على الحلقة الثلاثية.

المراجع:

1) حمادة الخليل نسرين، أحمد محمد خير 2012– الحلقات الثلاثية الأولية كلياً، مجلة بحوث جامعة حلب، العدد 82.

2) العبدالله مرهف، أحمد محمد خير 2015– خواص الانتظام في الحلقات الثلاثية، مجلة بحوث جامعة حلب، العدد 108.

3) Lister W. G., 1971–Ternary Rings, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 18, 37–55.

4) Dutta T. K and Kar S., 2005–On Semi prime Ideals and Irreducible Ideals of Ternary Semi Rings, *Bull. Cal. Math. Soc.*, 10, 467–476.

5) Dutta T. K and Kar S., 2006–A Note on Regular Ternary Semi Rings, *Kyungpook Math. J.*, 9, 357–365.

6) Kar S., 2011– Ideal Theory in the Ternary Semiring Z_0^-, Bull. Malays. Math. Sci. (2) 34(1), 69–77.

7) Salim Md., Mondal P. and Dutta T.K., 2015– Subdirect Sum of Ternary Rings and Subdirectly Irreducible Ternary Rings, Journal of Progressive Research in Mathematics, Volume 6, Issue 2.

8) Merry Sultana, Sujit Kumar Sardar, Jayasri Sircar., 2016– Prime Radical and Radical Ideal in Ternary Semiring, International Journal of Pure and Applied Mathmatics, Vol. 108, No. 3, pp. 467–476.

9) Madhusudhana Rao D., 2018–Properties Of Elements In Ternary–Semirings, International Journal of Computational Engineering Research (IJCER), vol. 08, 56–61.

قواعد البيانات التي تمت فهرسة المجلة ضمنها

جـامـعـة حـلـب في المـنـاطـق الـمـحـرّرة

Aleppo university in the liberated areas